

Cours – Séquence n° 10 – SUITES (III) :

compléments sur les suites

I- SUITES MONOTONES ET CONVERGENCE

Définitions

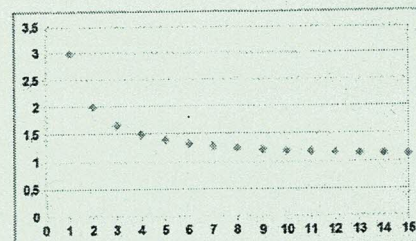
Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

1. Dire que la suite (u_n) est **majorée**, signifie qu'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n , $u_n \leq M$.
2. Dans le cas précédent, on dit que M est **un majorant** de la suite (u_n) .
3. Dire que la suite (u_n) est **minorée**, signifie qu'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n , $m \leq u_n$.
4. Dans le cas précédent, on dit que m est **un minorant** de la suite (u_n) .
5. Dire que la suite (u_n) est **bornée**, signifie que la suite (u_n) est majorée et minorée.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$, par : $u_n = 1 + \frac{2}{n}$.

Voici un nuage de points représentant cette suite graphiquement.



Démontrer que la suite (u_n) est bornée entre 1 et 3.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{2}{n} > 0, \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 + \frac{2}{n} > 1.$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \geq 1$$

$$\text{Donc la suite } (u_n) \text{ est minorée par } 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n \geq 1, \text{ donc } \frac{1}{n} \leq 1 \text{ donc } \frac{2}{n} \leq 2 \text{ donc } 1 + \frac{2}{n} \leq 3$$

$$\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \leq 3$$

$$\text{Donc la suite } (u_n) \text{ est majorée par } 3$$

$$\text{Donc la suite } (u_n) \text{ est bornée entre } 1 \text{ et } 3$$

Remarques

1. 3 est un majorant de la suite (u_n) , donc 3,5 ; 4 ; $5\sqrt{2}$; ... sont aussi des majorants de la suite.
2. Il existe des suites non majorées, non minorées. Par exemple, la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = (-2)^n$.

Propriétés : suites monotones divergentes

1. Si une suite est croissante et non majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
2. Si une suite est décroissante et non minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.

Démonstration *

1. Soit (u_n) une suite croissante non majorée. Par négation, dire que (u_n) est non majorée signifie que : quel que soit le réel A , il existe un entier naturel N tel que $u_N > A$.
Or, la suite (u_n) est croissante, donc pour tout entier naturel n tel $n \geq N$, $u_n > A$.
Quel que soit le réel A , l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) pour $n \geq N$.
Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
2. Démonstration analogue.

Théorèmes de convergence monotone (admis)

1. Si une suite est croissante et majorée, alors elle est convergente.
2. Si une suite est décroissante et minorée, alors elle est convergente.

Remarque Ce théorème permet de prouver la convergence d'une telle suite, mais ne fournit pas sa limite.

Exemple

Soit (t_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $t_0 = 1$ et $t_{n+1} = t_n + n$.

Démontrer que la suite (t_n) est croissante et non majorée, puis en déduire sa limite.

• $\forall n \in \mathbb{N} \quad t_{n+1} - t_n = t_n + n - t_n = n$ Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad t_{n+1} - t_n \geq 0$

Donc la suite (t_n) est croissante

• Raisonner par l'absurde : supposons que la suite (t_n) est majorée

Ainsi, (t_n) est croissante et majorée, donc d'après le théorème de convergence monotone, (t_n) converge vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N} \quad t_{n+1} = t_n + n$ Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, donc par somme,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_{n+1} = +\infty$ $\nearrow$ Contradiction avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = l$

Donc la suite (t_n) n'est pas majorée

• Ainsi la suite (t_n) est croissante et non majorée, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$

Propriétés

1. Si une suite (u_n) est majorée par M et converge vers l , alors $l \leq M$.
2. Si une suite (u_n) est minorée par m et converge vers l , alors $l \geq m$.

Démonstration

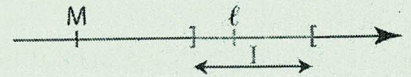
1. Soit (u_n) une suite majorée par M et convergente vers l .

Raisonnement par l'absurde. Supposons que $l > M$.

On note I un intervalle ouvert contenant l et inclus dans $]M; +\infty[$.

Or, (u_n) converge vers l . Donc, I contient tous les u_n à partir d'un certain rang et ces u_n sont donc supérieurs à M , ce qui est en contradiction avec le fait que (u_n) est majorée par M . Donc $l \leq M$.

2. Démonstration analogue.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 30$ et $u_{n+1} = 0,6u_n + 20$.

Démontrer que la suite (u_n) est croissante et majorée. En déduire qu'elle est convergente. Que dire de sa limite ?

Conjecture : Il semble que la suite (u_n) soit croissante et majorée par 50.

Démonstration par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq u_{n+1} \leq 50$

Initialisation : Si $n = 0$, alors $u_0 = 30$ et $u_1 = 0,6 \times 30 + 20$
 $u_1 = 38$

Ainsi, $u_0 \leq u_1 \leq 50$. Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons à un rang $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq u_{n+1} \leq 50$ et montrons que $u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 50$.

D'après l'hypothèse de récurrence $u_n \leq u_{n+1} \leq 50$

$$0,6u_n \leq 0,6u_{n+1} \leq 0,6 \times 50, \text{ car } 0,6 > 0$$

$$0,6u_n + 20 \leq 0,6u_{n+1} + 20 \leq 30 + 20$$

$$u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 50$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$. Elle est bien héréditaire.

Conclusion : D'après l'axiome de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq u_{n+1} \leq 50$$

Donc la suite (u_n) est croissante et majorée par 50.

Alors, d'après le Théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.

vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$.

Or, 50 est un majorant de la suite (u_n) .

Donc $l \leq 50$.

Propriétés

1. Si une suite est croissante et converge vers l , alors cette suite est majorée par l .
2. Si une suite est décroissante et converge vers l , alors cette suite est minorée par l .

Démonstration

1. Soit (u_n) une suite croissante et convergente vers l .
 Raisonnement par l'absurde. Supposons qu'il existe un rang p tel que $u_p > l$. Alors, $u_p > l + \beta$, avec $\beta > 0$.
 D'une part, (u_n) est croissante, donc pour tout $n \geq p$, $u_n \geq u_p$.
 D'autre part, (u_n) converge vers l , donc $]l - \alpha ; u_p[$, avec $\alpha > 0$, contient tous les u_n à partir d'un rang n_0 .
 On note N le plus grand des entiers p et n_0 .
 Pour tout $n \geq N$, on a à la fois $u_n \geq u_p$ et $u_n < u_p$. On aboutit à une contradiction.
 Donc l'hypothèse « il existe un rang p tel que $u_p > l$ » est fausse et sa négation est vraie.
 Donc pour tout entier naturel n , $u_n \leq l$, c'est-à-dire la suite (u_n) est majorée par l .
2. Démonstration analogue.

II- FONCTIONS CONTINUES ET SUITES CONVERGENTES**Définition**

Soient (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ et f une fonction définie sur un intervalle I contenant tous les termes u_n .

L'image de la suite (u_n) par la fonction f est la suite $(f(u_n))$.

Exemple

Soient (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n^2} + 1$ et f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\frac{1}{n^2} \geq 0$, donc $\frac{1}{n^2} + 1 \geq 1$, donc $u_n \in [1 ; +\infty[\subset [0 ; +\infty[$.

Ainsi, l'image de la suite (u_n) par la fonction f est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $f(u_n) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + 1}$.

Propriété (admise) : image d'une suite convergente par une fonction continue

Soit (u_n) une suite qui converge vers un nombre réel l .

Soit I un intervalle tel que $l \in I$ et pour tout entier naturel n , $u_n \in I$.

Pour toute fonction f définie sur l'intervalle I et continue en l , la suite $(f(u_n))$ converge vers le nombre $(f(l))$.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent en considérant la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \sqrt{\frac{1}{n^2} + 1}$.

- Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = f(u_n)$ avec $u_n = \frac{1}{n^2} + 1$ et f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
- D'après l'étude précédente, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n \in [0 ; +\infty[$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, donc, par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$. Donc la suite (u_n) converge vers 1.
- Or, la fonction f est continue sur $[0 ; +\infty[$, donc en particulier en 1.
 Donc la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(1)$, c'est-à-dire $\sqrt{1}$. Soit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.

Théorème du point fixe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par un premier terme $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si

- la suite (u_n) converge vers un nombre réel $l \in I$
- la fonction f est continue sur I

alors l est une solution dans I de l'équation $f(x) = x$.

Démonstration

Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

Or, d'une part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ et comme f est continue en $l \in I$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$.

D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$.

Par unicité de la limite, on obtient donc : $f(l) = l$

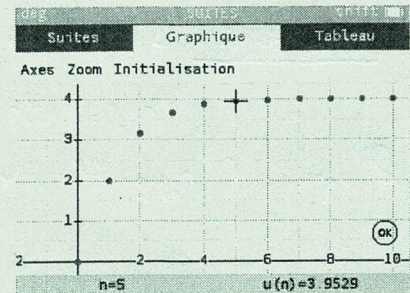
Remarque

Si l'équation $f(x) = x$ admet plusieurs solutions, on prendra celle correspondant aux caractéristiques de la suite (u_n) .

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

Le nuage de points ci-contre représente graphiquement les premiers termes de la suite (u_n) .



1. Quelles conjectures peut-on émettre sur la suite (u_n) ?
2. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

1) Conjecture : Il semble que la suite (u_n) soit croissante, bornée et converge vers 4.

2) 1^{ère} étape : On introduit une fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{3x+4}$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$

2^{ème} étape : Etudions les variations de f

• $f = \sqrt{u}$, avec $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $u(x) = 3x+4$

• u est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme fonction affine définie sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $3x+4 > 0$

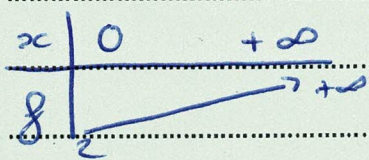
Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$

donc $u(x) > 0$

• $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$

• $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{3x+4} > 0$ et $3 > 0$ et $2 > 0$, donc par produit, pour qu'on ait, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $f'(x) > 0$

• Soit f et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$



$$f(0) = \sqrt{3 \times 0 + 4} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x+4} \\ = \sqrt{4} \\ = 2$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x+4) = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\text{Donc, par composition, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Ainsi, } \forall x \in \mathbb{R}^+ f(x) \in [2; +\infty[\subset]0; +\infty[$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \in \mathbb{R}^+$$

3^{ème} étape : Démonstration par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0_n \leq 0_{n+1} \leq 4$

• Initialisation : Si $n=0$, alors $0_0 = 0$ et $0_1 = f(0_0) = f(0) = 2$

$$\text{Donc } 0_0 \leq 0_1 \leq 4$$

Donc la propriété est vraie au rang $n=0$

• Hérédité : Supposons que à un rang $n \in \mathbb{N}$, $0_n \leq 0_{n+1} \leq 4$ et montrons que $0_{n+1} \leq 0_{n+2} \leq 4$

D'après l'hypothèse de récurrence : $0_n \leq 0_{n+1} \leq 4$

$$f(0_n) \leq f(0_{n+1}) \leq f(4), \text{ car } f \text{ strictement croissante sur } \mathbb{R}^+$$

$$0_{n+1} \leq 0_{n+2} \leq 4$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$, elle est héréditaire

Conclusion : D'après l'axiome de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0_n \leq 0_{n+1} \leq 4$$

4^{ème} étape : Justifions la convergence de (0_n)

La suite (0_n) est croissante et majorée par 4.

Alors, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (0_n) converge vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$ et $0 \leq l \leq 4$

Étape 5 : Déterminons la limite l

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}, 0_{n+1} = f(0_n) \text{ et } 0_0 \in \mathbb{R}^+$$

$$\bullet \forall x \in \mathbb{R}^+ f(x) \in \mathbb{R}^+$$

$$\bullet (0_n) \text{ converge vers } l \in \mathbb{R}^+$$

* f est continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}^+$

Ainsi, d'après le théorème du point fixe, elle admet une solution dans $\mathbb{R}^+$ de l'équation

$$f(x) = x : (E)$$

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt{3x+4} = x$$

$$(E) \Leftrightarrow 3x+4 = x^2$$

$$(E) \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

On reconnaît un polynôme du second degré avec $a=1$, $b=-3$ et $c=-4$.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta = 25 > 0$, donc le polynôme a deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= -1$$

$$= 4$$

$0, -1 \notin \mathbb{R}^+$, donc $\ell = \emptyset$

Ainsi, la suite (U_n) converge vers $\emptyset$. Conjecture validée.